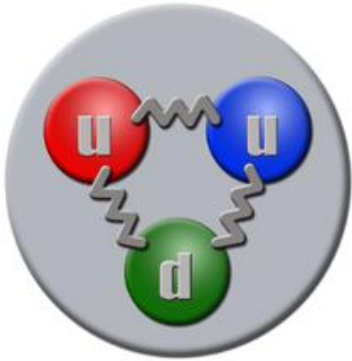
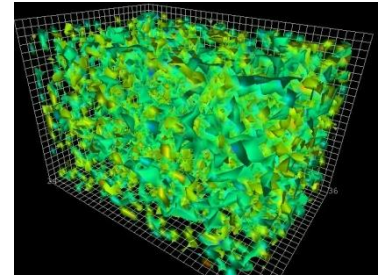


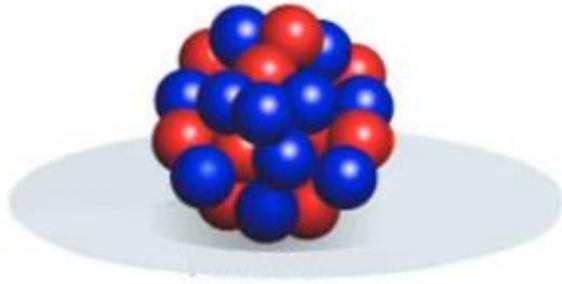
LQCD

Lattice quantum chromodynamics



Valentin Benedetti

Introducción a la física nuclear 2018



Mecánica
cuántica no
relativista

8 MeV
(Energía de
separación del
plomo)



Teoría efectiva
de campos con
simetría Chiral

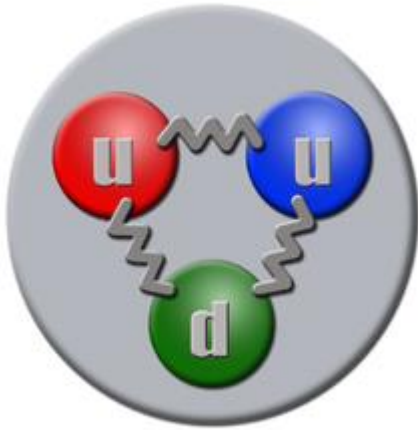
140 MeV
(Masa del
Pion)



Cromodinámica
cuántica

940 MeV
(Masa del
Protón)

¿ De donde de viene la masa del protón?



$$m_{up} = 2.8 \text{ MeV}/c^2$$

$$m_{down} = 5.2 \text{ MeV}/c^2$$

$$2m_{up} + m_{down} = 10.8 \text{ MeV}/c^2$$

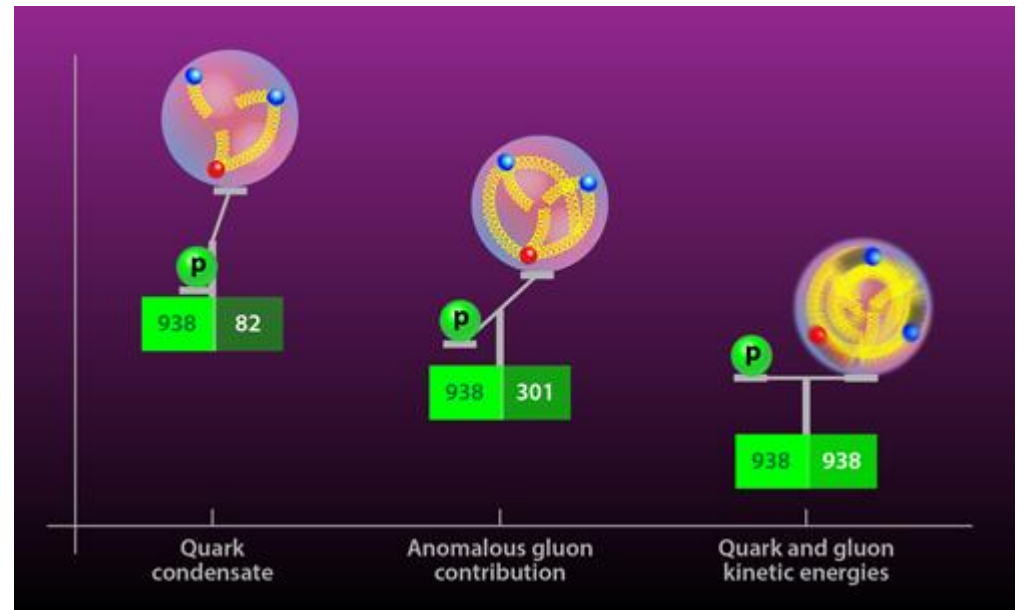
$$m_{protón} = 938,272013 \text{ MeV}/c^2$$

Aproximadamente el 90% de la masa del protón viene de la dinámica de quarks y gluones (QCBE)

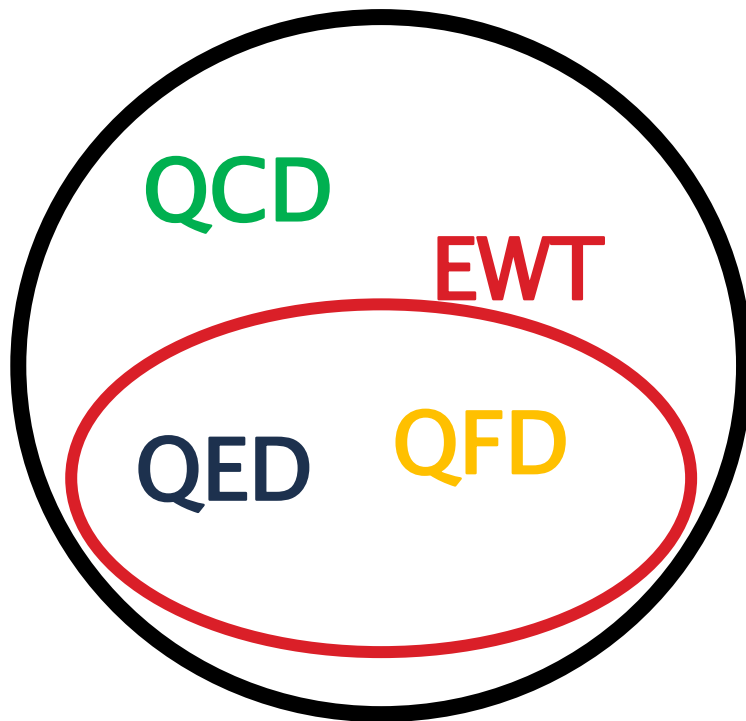
¿ De donde de viene la masa del protón?

A partir de LQCD puede obtenerse que la masa del protón proviene de

- ✘ **9%** condensado de quarks
- ✘ **32%** energia de los quarks
- ✘ **37%** intensidad del campo gluónico
- ✘ **23%** contribución anomala de de los gluones



Modelo Estándar



Tres generaciones de la materia (fermiones)

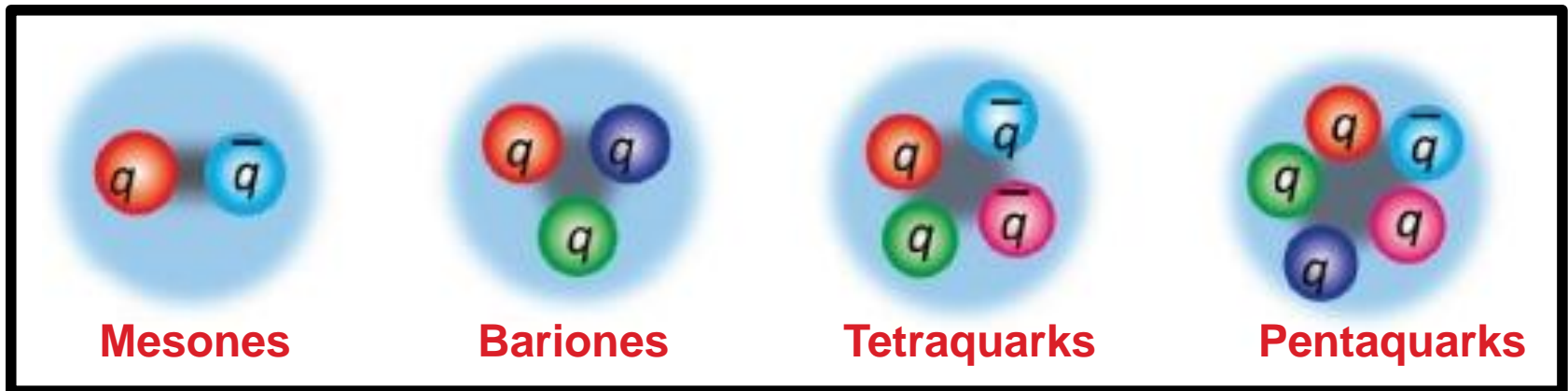
	I	II	III	
masa →	2.4 MeV	1.27 GeV	171.2 GeV	0
carga →	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
espín →	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
nombre →	u arriba	c encanto	t cima	γ fotón
	4.8 MeV	104 MeV	4.2 GeV	0
	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
Quarks	d abajo	s extraño	b fondo	g gluón
	<2.2 eV	<0.17 MeV	<15.5 MeV	91.2 GeV
	0	0	0	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	ν_e neutrino electrónico	ν_μ neutrino muónico	ν_τ neutrino tauónico	Z^0 bosón Z
	0.511 MeV	105.7 MeV	1.777 GeV	80.4 GeV
	-1	-1	-1	± 1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
Leptones	e electrón	μ muón	τ tauón	W^\pm bosón W

Bosones de gauge

Cromodinámica cuántica

2.4 MeV $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ u arriba	1.27 GeV $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ c encanto	171.2 GeV $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ t cima	
4.8 MeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ d abajo	104 MeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ s extraño	4.2 GeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ b fondo	0 0 1 g gluón

HADRONES



Mesones

Particle name	Particle symbol	Antiparticle symbol	Quark content
Charmed eta meson	$\eta_c(1S)$	Self	$c\bar{c}$
Bottom eta meson	$\eta_b(1S)$	Self	$b\bar{b}$
Kaon	K^+	K^-	$u\bar{s}$
Kaon	K^0	\bar{K}^0	$d\bar{s}$

Crédito: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_mesons

Bariones

Particle name	Symbol	Quark content
Sigma	Σ^0	uds
Sigma	Σ^-	dds
charmed Xi	Ξ_c^+	usc
charmed Xi	Ξ_c^0	dsc
charmed Xi prime	Ξ_c^{*+}	usc
charmed Xi prime	Ξ_c^{*0}	dsc



Crédito: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_baryons

Repaso: Gauge electromagnetico

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \chi$$

(V, \mathbf{A}) tiene cuatro grados de libertad y físicamente es esperable que solo sean dos. Esto esta relacionado con la necesidad de fijar χ

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \rightarrow -\nabla \left(V + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$V \rightarrow V + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Cromodinámica cuántica (QCD)

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \boxed{\bar{q}i\gamma^\mu\partial_\mu q - \bar{q}mq} \quad \boxed{-\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu}_a} \quad \boxed{-\bar{q}\gamma^\mu T_a q G_\mu^a}$$

Quarks **Gluones** **Interacción**

Teoría de gauge (no Abelian)

El grupo de simetría **SU(3)**
(matrices unitarias 3x3 con
las entradas complejas y
determinante igual a 1)

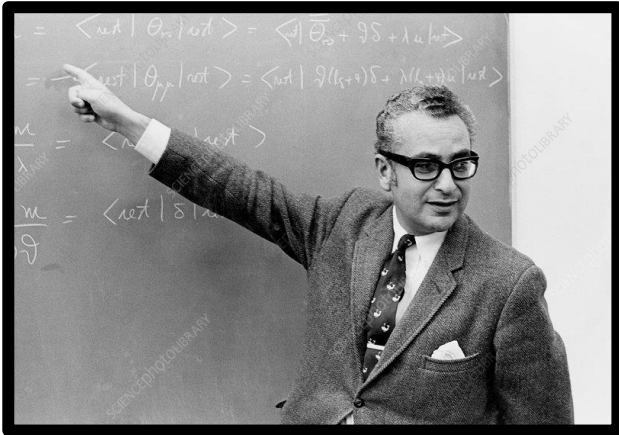
Simetría local para
los quarks

$$q(x) \rightarrow e^{i\alpha_a(x)T^a} q(x)$$

Gluones (bosones)
son los portadores de
interacción fuerte
entre los quarks
(fermiones)

8 clases de gluones que
dan los distintos tipos de
carga color (conservada
por teorema de Noether)

Cromodinámica cuántica (QCD)



Murray Gell-Mann.
(Quarks y gluones)
Premio Nobel 1969



David Politzer, David Gross, Frank Wilczek.
(Cromodinámica cuántica)
Premio Nobel 2004

Cromodinámica cuántica (QCD)

Fenomenología de bajas energías
(escala hadronica)

Cinco parámetros:

- Tres masas de quarks livianos (m_u, m_d, m_s)
- Escala de la interacción fuerte (Λ_{QCD})
- Constante de estructura fina (α)

Soluciones analíticas (o perturbativas) son difíciles de obtener dada la alta interacción (a bajas energías)

Comienzos de LQCD

PHYSICAL REVIEW D

VOLUME 10, NUMBER 8

15 OCTOBER 1974

Confinement of quarks*

Kenneth G. Wilson

Laboratory of Nuclear Studies, Cornell University, Ithaca, New York 14850

(Received 12 June 1974)

A mechanism for total confinement of quarks, similar to that of Schwinger, is defined which requires the existence of Abelian or non-Abelian gauge fields. It is shown how to quantize a gauge field theory on a discrete lattice in Euclidean space-time, preserving exact gauge invariance and treating the gauge fields as angular variables (which makes a gauge-fixing term unnecessary). The lattice gauge theory has a computable strong-coupling limit; in this limit the binding mechanism applies and there are no free quarks. There is unfortunately no Lorentz (or Euclidean) invariance in the strong-coupling limit. The strong-coupling expansion involves sums over all quark paths and sums over all surfaces (on the lattice) joining quark paths. This structure is reminiscent of relativistic string models of hadrons.

I. INTRODUCTION

The success of the quark-constituent picture both for resonances and for deep-inelastic electron and neutrino processes makes it difficult to believe quarks do not exist. The problem is that quarks have not been seen. This suggests that quarks, for some reason, cannot appear as separate particles in a final state. A number of speculations have been offered as to how this might happen.¹

Independently of the quark problem, Schwinger observed many years ago² that the vector mesons of a gauge theory can have a nonzero mass if vacuum polarization totally screens the charges in a gauge theory. Schwinger illustrated this result with the exact solution of quantum electrodynamics in one space and one time dimension, where the photon acquires a mass $\sim e^2$ for any nonzero charge e [e has dimensions of $(\text{mass})^{1/2}$ in this theory].

particles over short times and short distances. The polarization effects which prevent the appearance of electrons in the final state take place on a longer time scale (longer than $1/m_\gamma$, where m_γ is the photon mass).

A new mechanism which keeps quarks bound will be proposed in this paper. The mechanism applies to gauge theories only. The mechanism will be illustrated using the strong-coupling limit of a gauge theory in four-dimensional space-time. However, the model discussed here has a built-in ultraviolet cutoff, and in the strong-coupling limit all particle masses (including the gauge field masses) are much larger than the cutoff; in consequence the theory is far from covariant.

The confinement mechanism proposed here is soft (long-time scale). However, in the model discussed here the cutoff spoils the possibility of free pointlike behavior for the quarks.

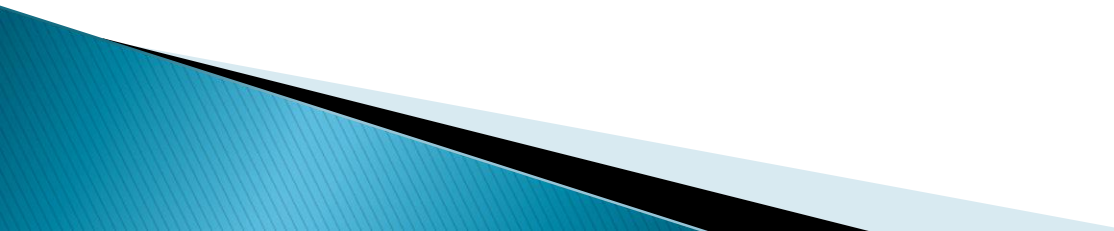
The model discussed in this paper is a gauge



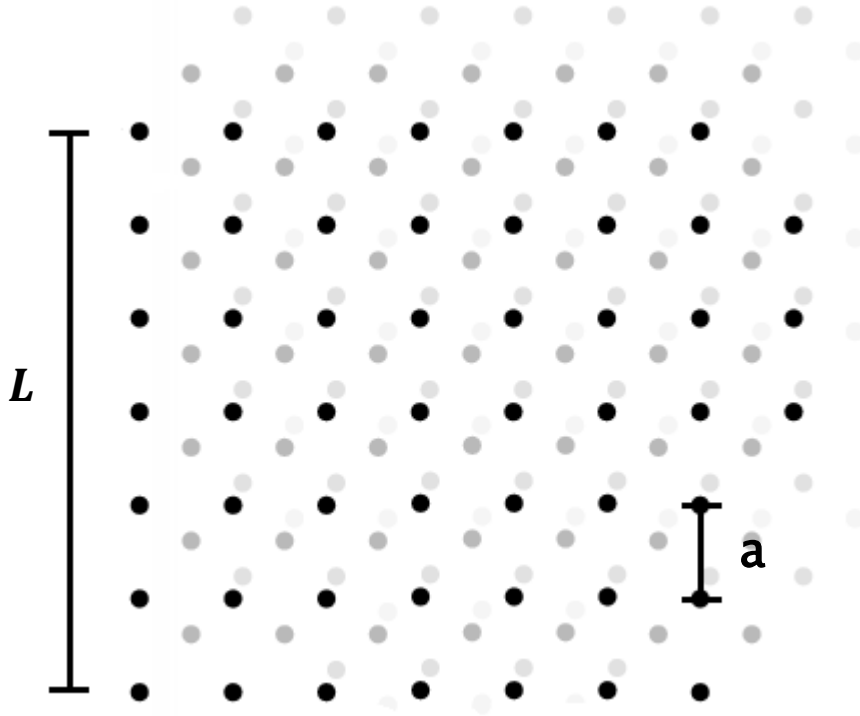
**Kenneth Geddes Wilson
(Premio Nobel 1982)**

Phys. Rev. D **10**,
2445 (1974)

El objetivo de LQCD es hacer **predicciones** para **observables** de la **interacción fuerte** en un **volumen infinito**, **continuo** definido por la métrica de **Minkowski** a partir de cálculos en un **volumen finito** de un espacio-tiempo **euclideo discreto**



La red discreta como regulador

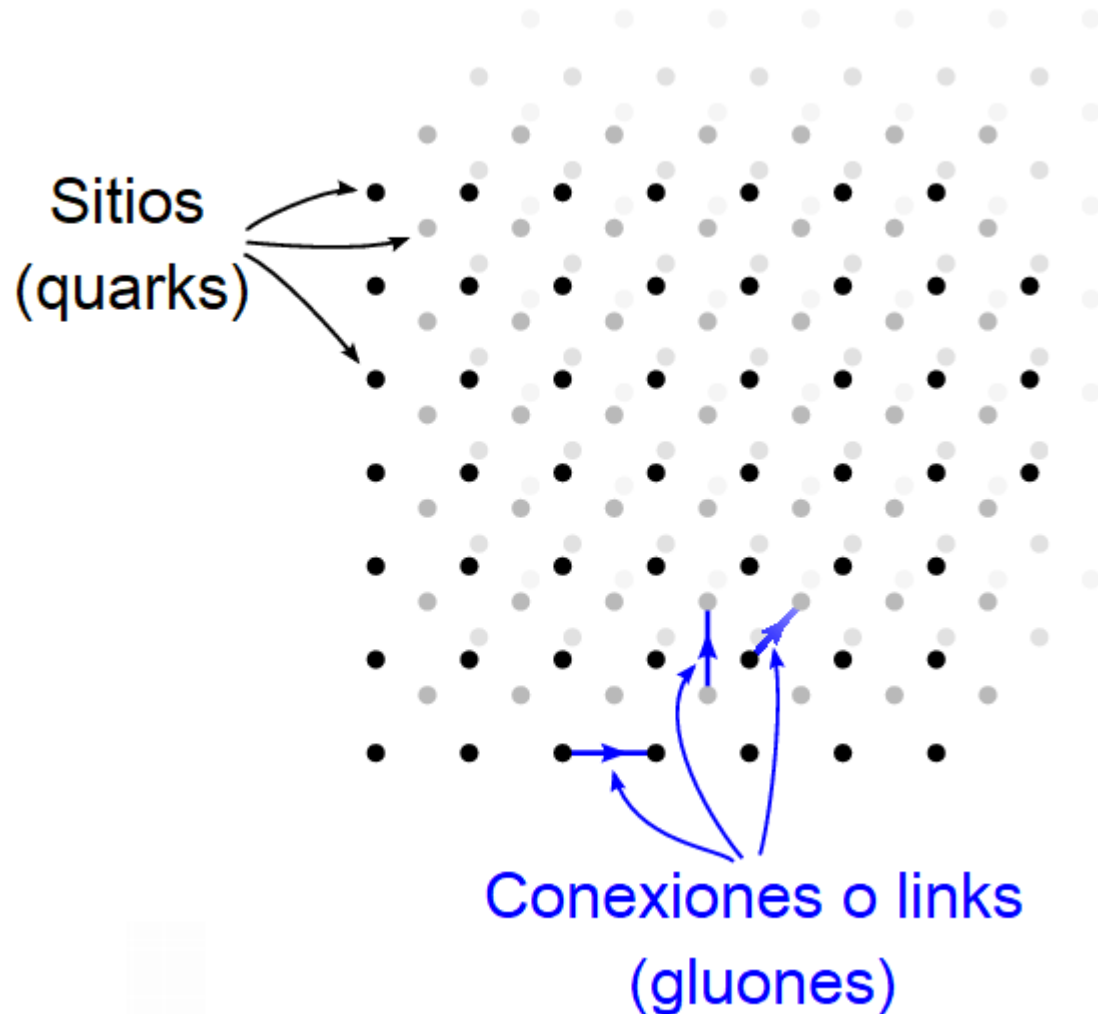


$$\mathcal{H} = \bigotimes_{\alpha} \mathcal{H}_{\alpha}$$

- ✗ La red discreta no debe eliminar las simetrías presentes en el continuo (Lorenz, $SU(3)$, paridad, time reversal, Chiral, etc),
- ✗ La red discreta no debe introducir mas parámetros libres que los presentes en el continuo,
- ✗ Hay que considerar el tiempo como una de las direcciones del lattice
- ✗ Limite continuo $a \rightarrow 0$ con L fijo
- ✗ Limite infinito $L \rightarrow \infty$

¿Cómo es la vida en la red?

- ✘ Los **quarks** son representados por los sitios de la red (Al igual que en continuo tienen color, sabor y spin).
- ✘ Los **gluones** son representados por las conexiones (o links) entre los sitios y son elementos del grupo de simetría $SU(3)$ correspondiente a la QCD continua.



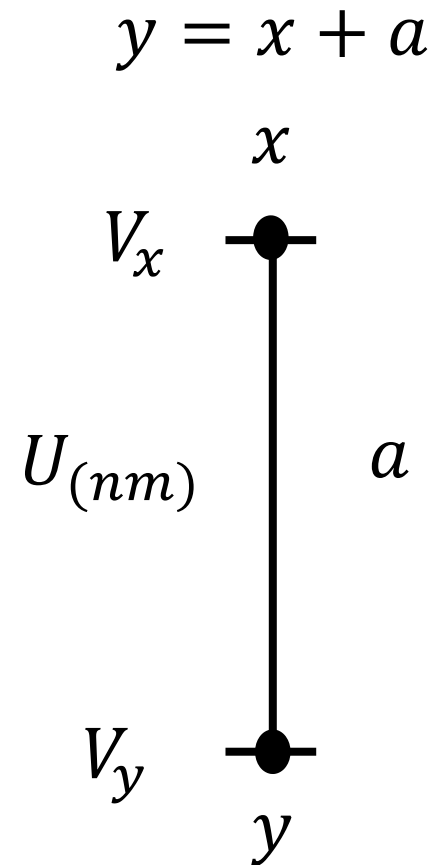
Gluones

$$U_{(xy)}, V_x, V_y \in SU(3)$$

Transformaciones de gauge:

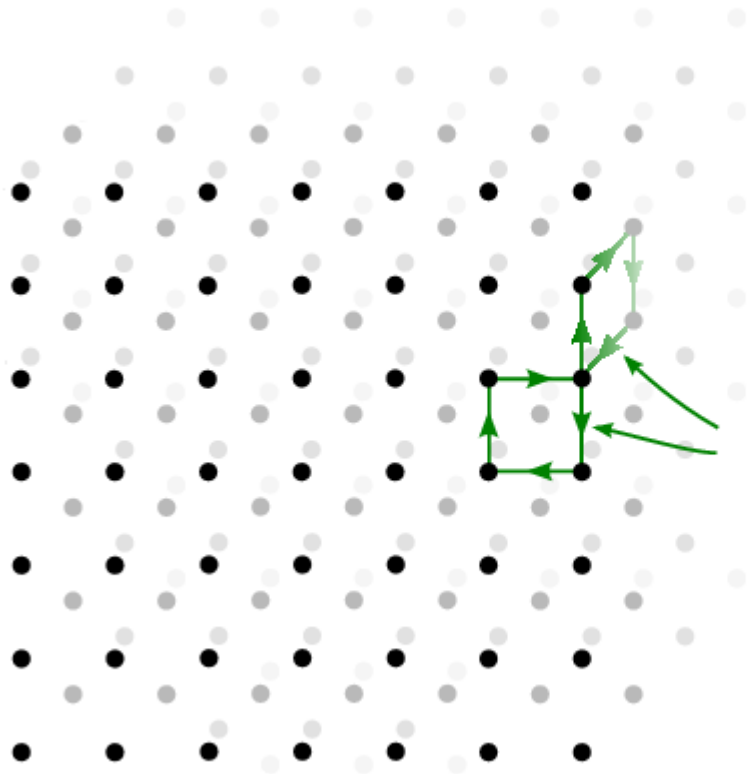
$$U_{(xy)} \rightarrow V_x U_{(xy)} V_y^{-1}$$

$$\text{OBS! } q_x \rightarrow V_x q_x$$

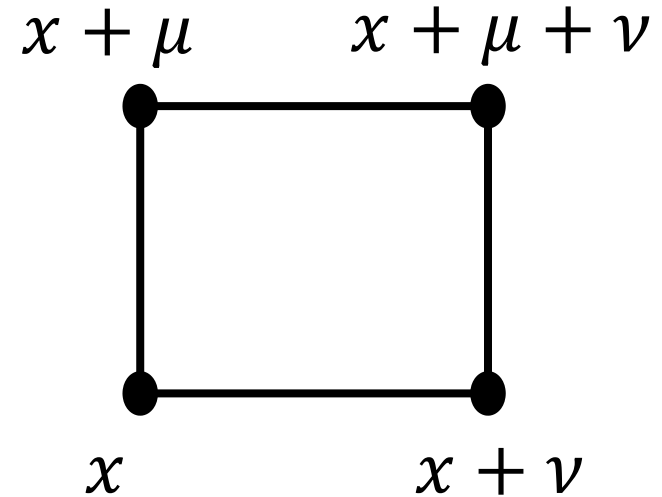


Todos los caminos cerrados son invariantes de gauge y por ende observables (Bucles)

Acción gluónica



Plaquetas



Son el invariante de gauge más simple

$$S_g \rightarrow \text{Tr}(\square_{\mu\nu}) = \text{Tr}(U_\mu(x)U_\nu(x + \nu)U_\nu^\dagger(x + \mu)U_\mu^\dagger(x))$$

Acción fermiónica (quarks)

$$\mathcal{L}_{\text{QUARKS}} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q \longrightarrow S_q = \sum_{xy} \bar{q}(x)M(x,y)q(y)$$

Tamaño de Red : $10^3 \times 20$

Dimension de M: $10^6 \times 10^6$

Hay que elegir bien $M(x,y)$

Acción fermiónica (quarks)

Action	Advantages	Disadvantages
Wilson	Computationally fast	Breaks chiral symmetry, $O(a)$ error, additive mass renormalization
Improved Wilson (Clover)	Computationally fast	Breaks chiral symmetry, operator improvement is necessary
Twisted mass (with flavor dependent chiral rotation)	Computationally fast	Breaks chiral symmetry, Isospin breaking
Staggered	Computationally fast	Fourth root problem, taste breaking, complication in operator construction
Highly improved staggered (HISQ)	Computationally reasonably fast, lesser taste breaking	Fourth root problem, complication in operator construction
Domain wall	Improved Chiral symmetry	Not ultralocal, computationally expensive
Overlap	Exact chiral symmetry	Not ultralocal, computationally very expensive

Crédito [4]



US Lattice Quantum Chromodynamics



12s cluster en Jlab



Pi0 cluster en Fermilab

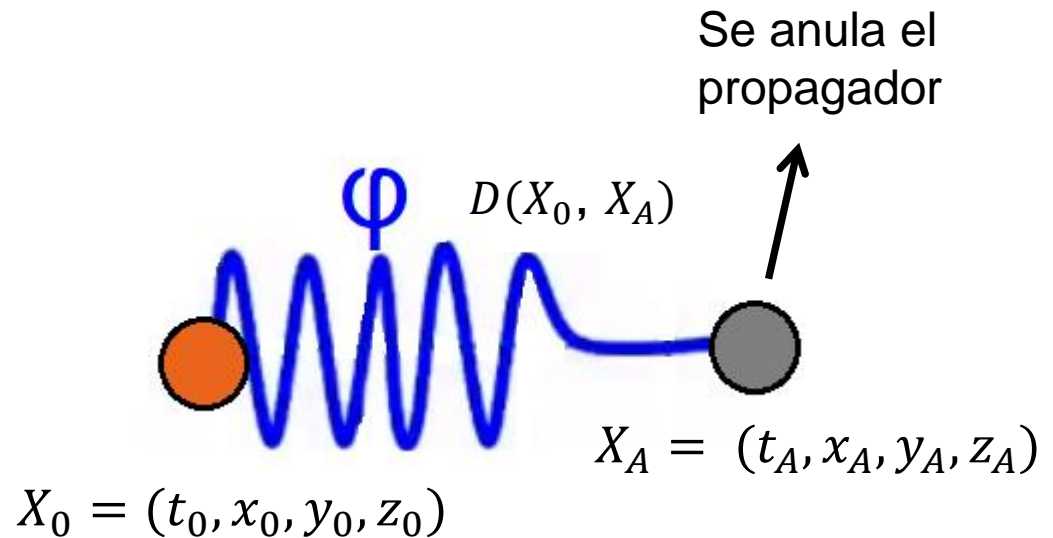
Masa de un protón

El **propagador** es una función que especifica la amplitud de probabilidad de que una partícula viaje de una lugar en el espacio-tiempo a otro o bien que viaje con cierta energía o momento

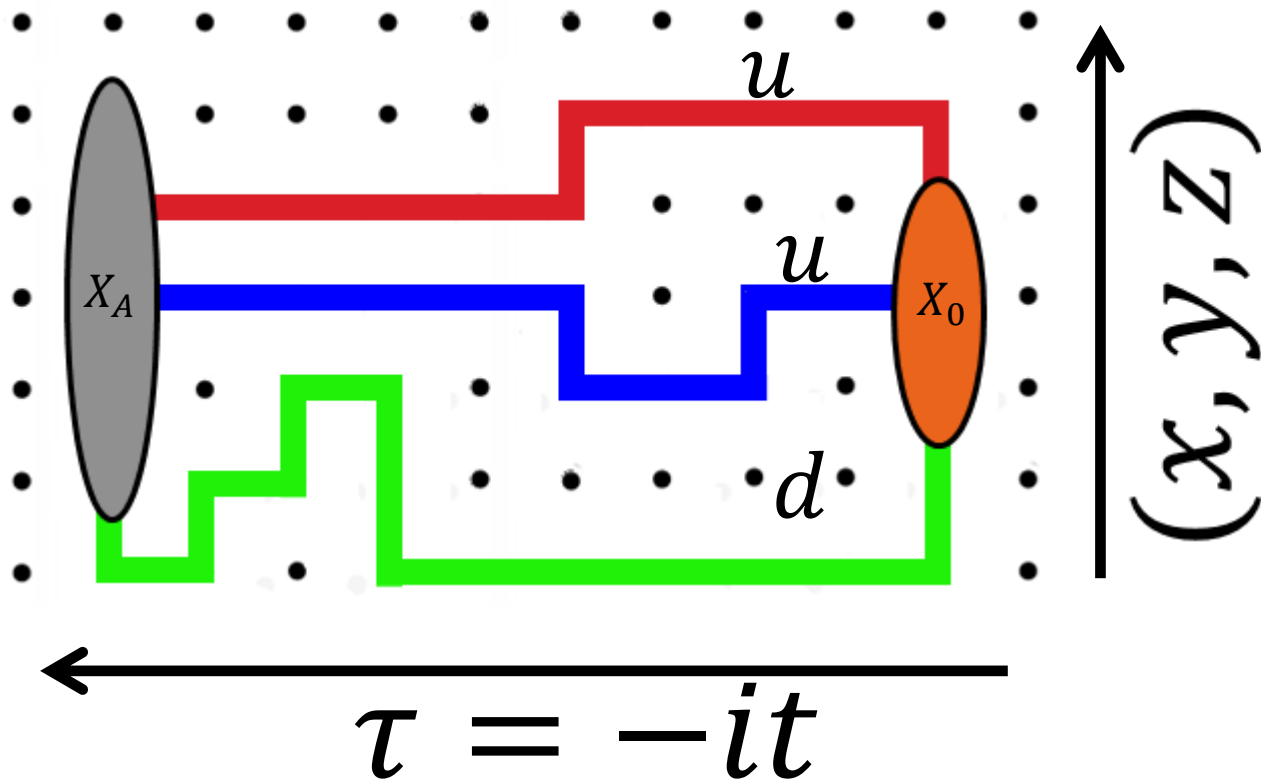
$$D(x, y) = \langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle$$

Para estudiar un proton voy a tener que calcular el propagador correspondiente a un operador (φ) que pueda **crear un proton a partir del vacío**

En particular me interesa el propagador correspondiente a φ entre un estado inicial fijo y cualquier estado final donde el propagador se anule



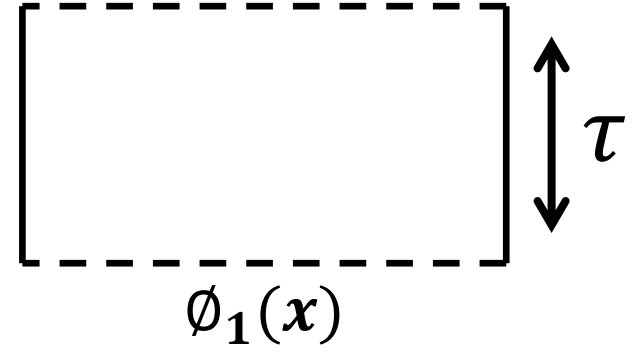
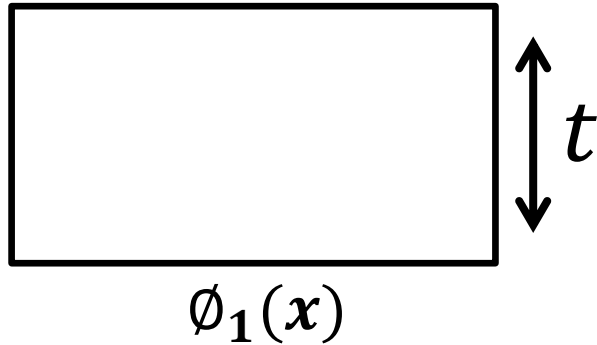
Masa de un protón



$$\sim f(M^{-1})$$

Integrales de camino

$$Z[\phi] = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]} \xrightarrow{\tau \rightarrow -it} Z[\phi] = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]}$$



$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}[\phi] e^{-S_E[\phi]} = \frac{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}[\phi] e^{-S_E[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi]}}$$

Integración por Montecarlo

Se supone que las leyes microscópicas están definidas en términos de probabilidad y por ende es posible generar una secuencia de configuraciones independientes sobre los caminos posibles o sobre localizaciones del espacio de configuración

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z[U, q, \bar{q}]} \int [dU][dq][d\bar{q}] \mathcal{O}[\phi] e^{-S_E[U, q, \bar{q}]}$$

Se hace el promedio sobre un numero representativo de configuraciones gluónicas $\{U_i\}$ con probabilidad $P(U_i) \propto \int [dq][d\bar{q}] e^{-S_E[U, q, \bar{q}]}$

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{O}\{U_i\} + \Delta \mathcal{O} \quad \Delta \mathcal{O} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Masa de un protón: Calculo computacional del propagador

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{O}\{U_i\} + \Delta \mathcal{O}$$

✘ $\mathcal{O} = \varphi(x)\varphi(y)$

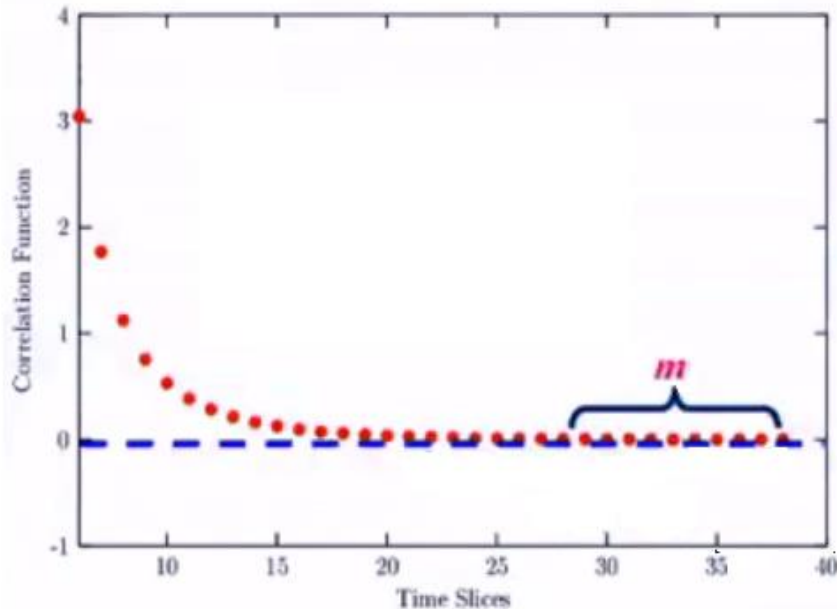
✘ $\Delta \mathcal{O} \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$

✘ U_i configuraciones arbitrarias de gluones

Integración por Montecarlo

Masa de un protón

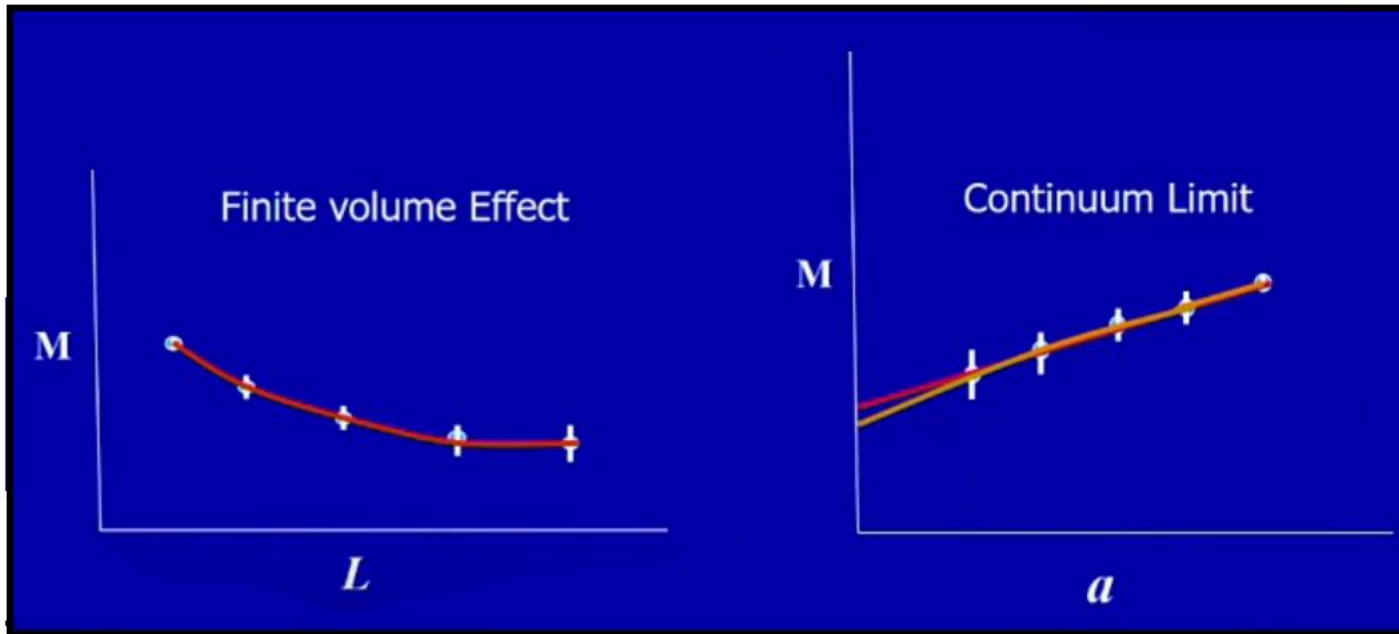
$$D(\tau) = \sum_{i=1}^N W_i e^{-m_i \tau} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} W_1 e^{-m_1 \tau}$$



$$m(\tau) = \ln \left(\frac{D(\tau)}{D(\tau + 1)} \right)$$

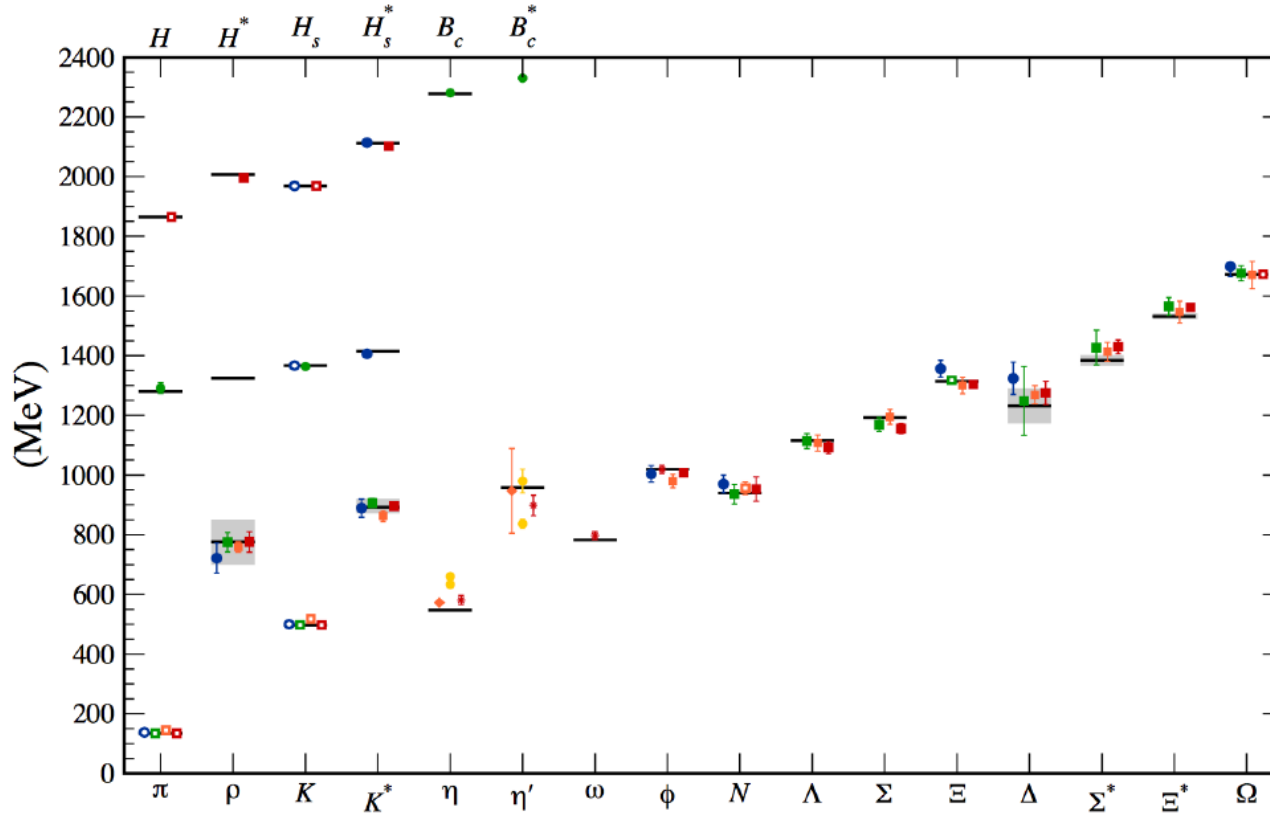
Fiteo para la masa de un proton. Credito [4]

Masa de un protón



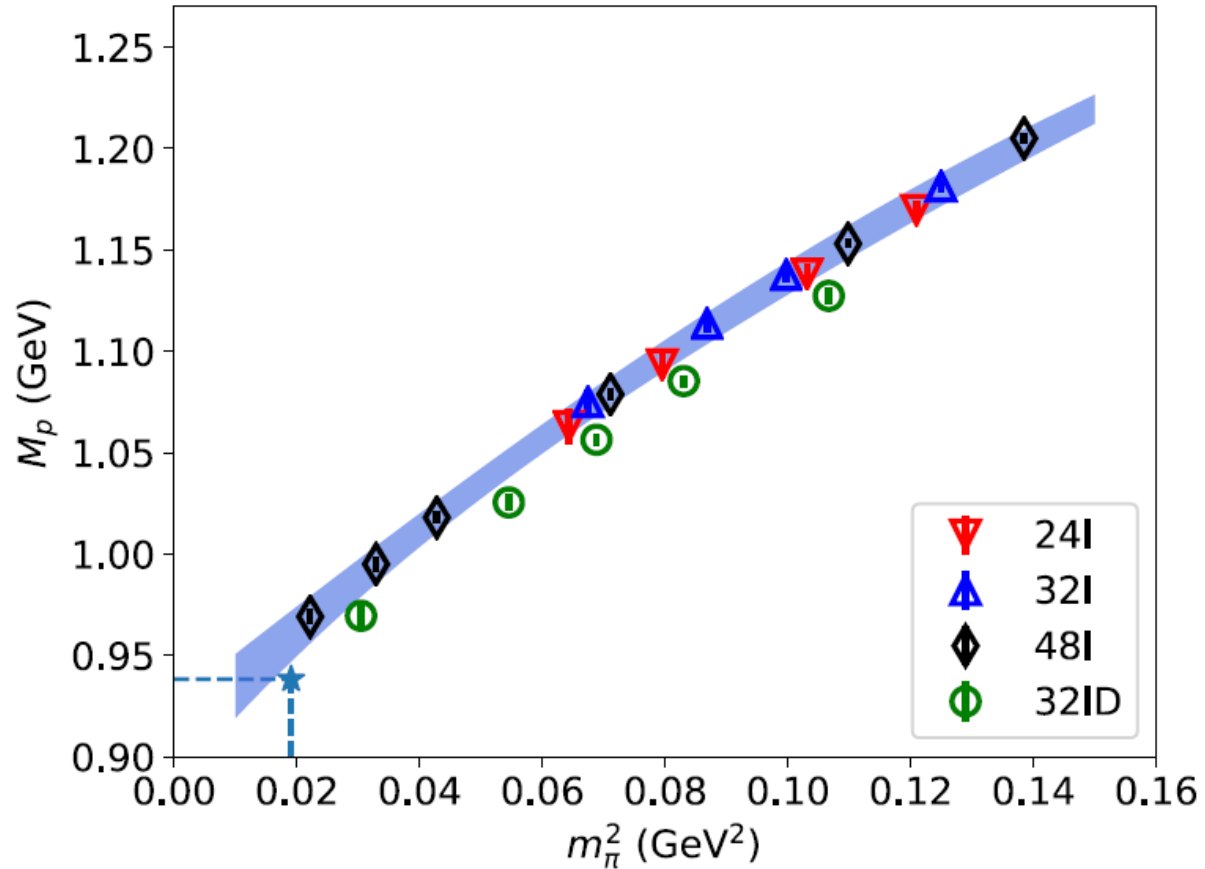
Hay que buscar la saturación

Otros resultados



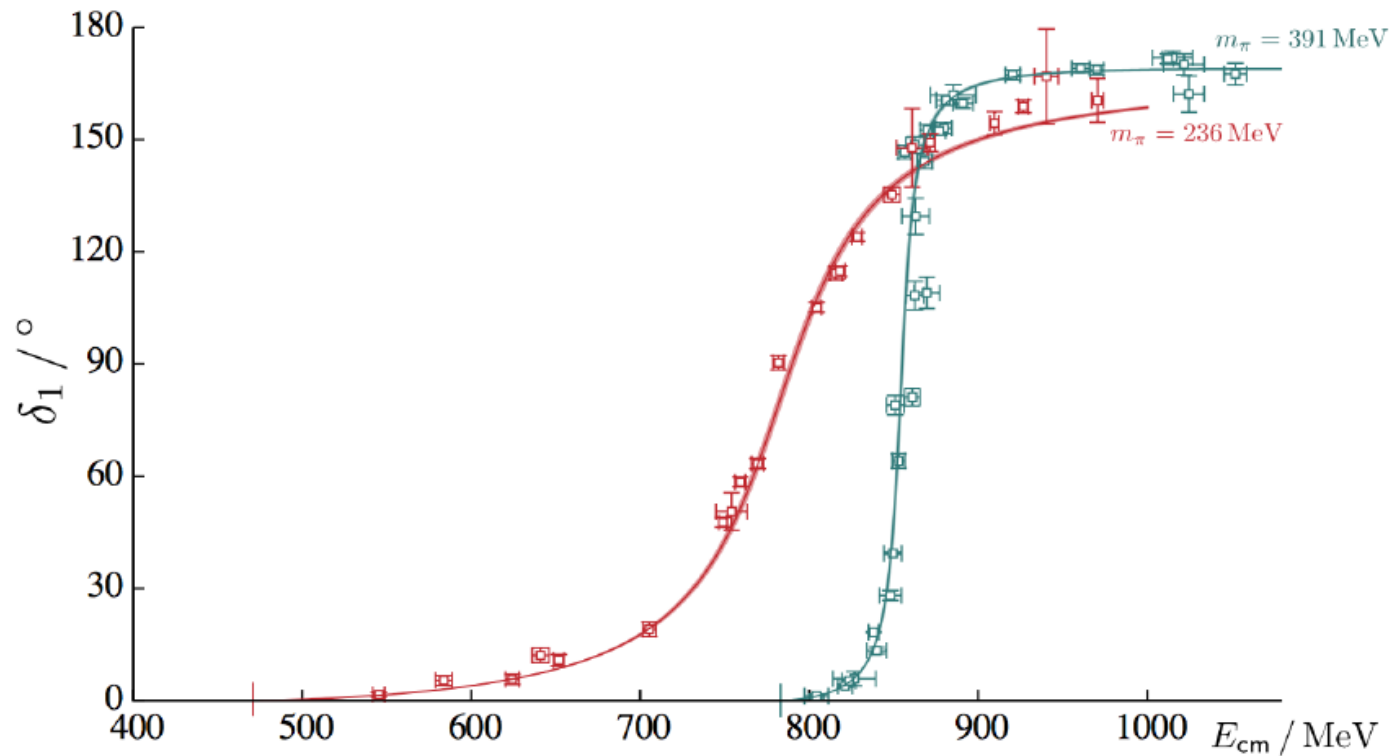
Resumen de las masas hadrónicas obtenidas con LQCD , los colores denotan distintos cálculos y los círculos abiertos que fueron valores usados para tuning de parametros. Crédito [6]

Otros resultados



Masa del protón para distantes masas de piones.
Crédito [5]

Otros resultados: resonancias

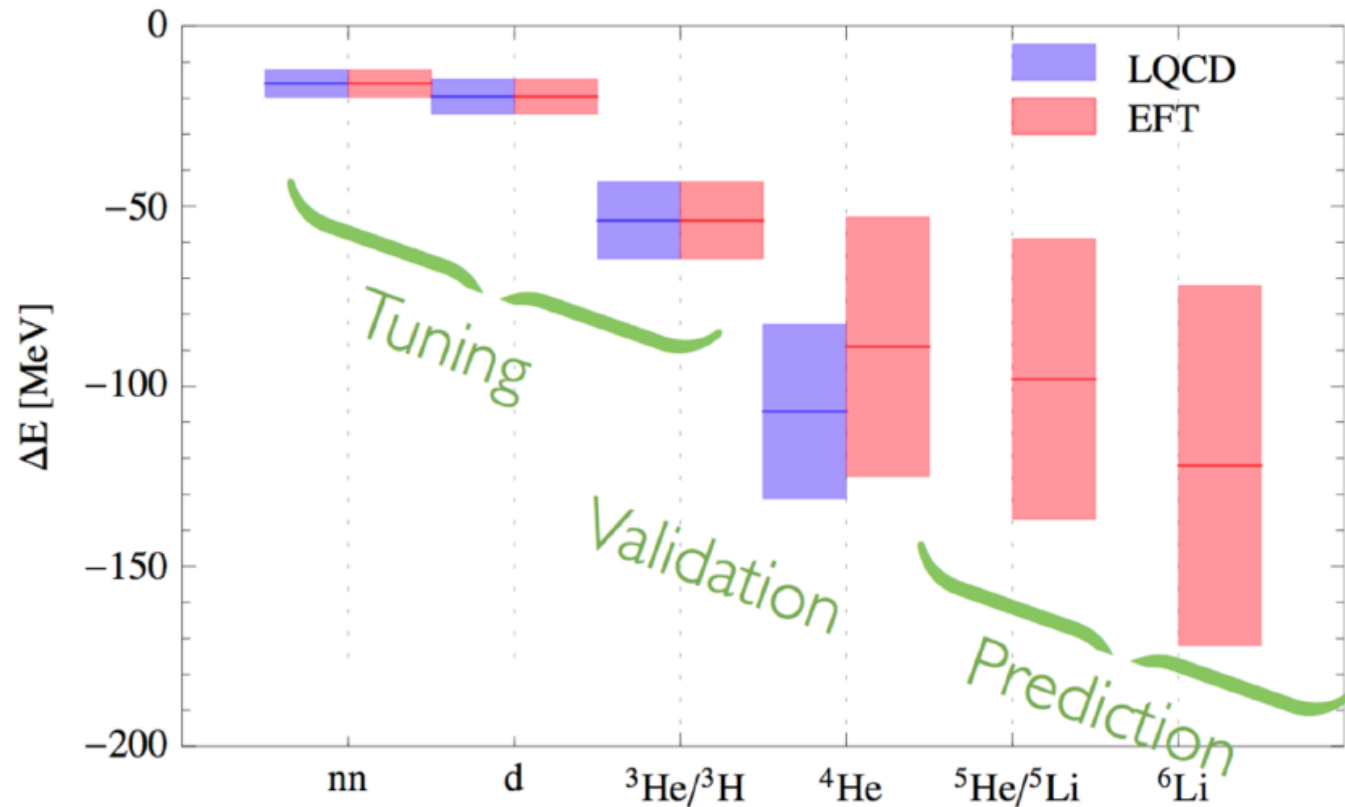


Resonancias ρ para piones de diferente masa. Crédito [7]

LQCD y χ EFT

Para una red de $L^3 \times T$ y espaciado a si vale
que $a \ll \Lambda_{QCD}^{-1}$ y $m_\pi L, m_\pi T \gg 2\pi$

Energías de
ligadura para
núcleos livianos y
tuning de LQCD
con EFT. Crédito [3]



REFERENCIAS

- [1] A. Walke-Loud, *Viewpoint: Dissecting the Mass of the Proton*, APS Physics 11, 118, [<https://physics.aps.org/articles/v11/118>]
- [2] K. G. Wilson, *Confinement of quarks*, Phys. Rev. D **10**, 2445 (1974)
- [3] M. J. Savage, *Nuclear Physics from Lattice Quantum Chromodynamics*, Twelfth Conference on the Intersections of Particle and Nuclear Physics [arXiv:1510.01787]
- [4] N. Mathur, *An introduction to Lattice Quantum Chromodynamics*, Nonperturbative and Numerical Approaches to Quantum Gravity, String Theory and Holography en International Centre for Theoretical Sciences.
- [5] Y. Yang et al, *Proton Mass Decomposition from the QCD Energy Momentum Tensor*, PRL 121, 212001 (2018)
- [6] A. S. Kronfeld, *Twenty-first Century Lattice Gauge Theory: Results from the QCD Lagrangian*, Rev. Nucl. Part. Sci. 62, 265 (2012) [arXiv:1203.1204]
- [7] D. J. Wilson, R. A. Briceño, J. J. Dudek, R. G. Edwards, C. E. Thomas, *Coupled $\pi\pi, KK$ scattering in P-wave and the ρ resonance from lattice QCD*, [arXiv:1507.02599]

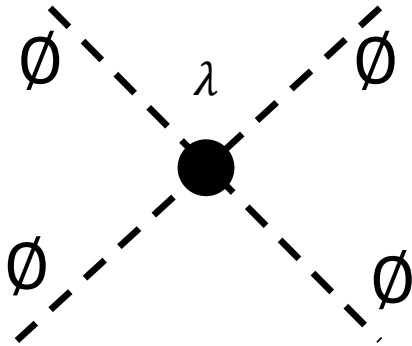


FIN

EJEMPLO FÁCIL: CAMPO ESCALAR

¿Por qué introducir la red discreta?

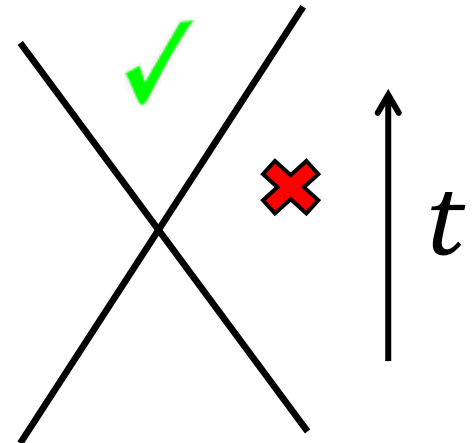
$$S[\phi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi(x))^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi(x)^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi(x)^4 \right]$$



El equivalente de este término en 1ra cuantización es $V(x_1 - x_2) = \frac{\lambda}{4!} \delta^d(x_1 - x_2)$

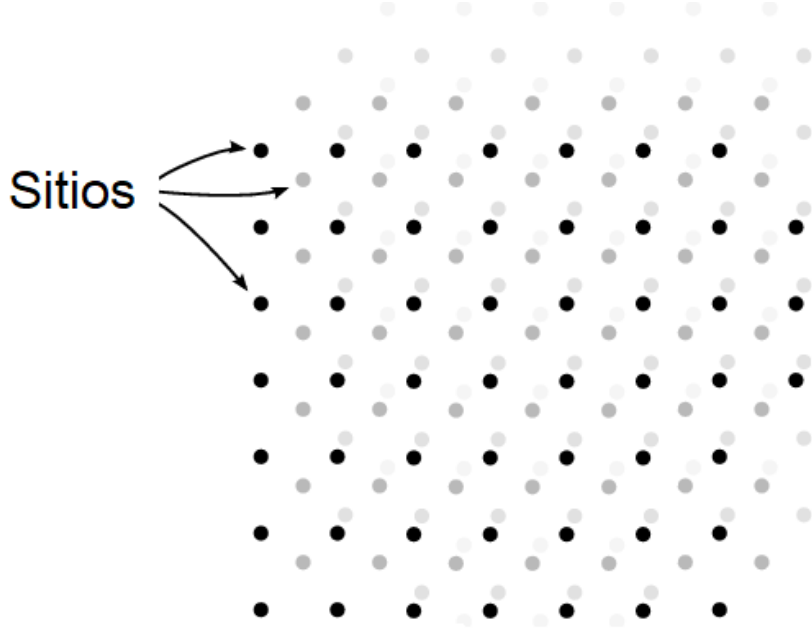
Los valores medios de scattering (y otras cosas...) divergen

En teorías relativistas la causalidad requiere interacciones locales



Campo escalar en la red

$$S[\phi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi(x))^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi(x)^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi(x)^4 \right]$$



$$\phi(x) \rightarrow \phi_n, \quad x = na$$

$$\int dx_i \rightarrow a \sum_{n_i}$$

$$\int \mathcal{D}\phi \rightarrow \prod_n d\phi_n$$

$$\partial_\mu \phi(x) \rightarrow \Delta_\mu \phi = \frac{1}{a} (\phi_{n+\hat{\mu}} - \phi_n)$$

$$\Delta_\mu^* \phi = \frac{1}{a} (\phi_n - \phi_{n-\hat{\mu}})$$

$$S[\phi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} \Delta_\mu^* \phi \Delta_\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi_n^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi_n^4 \right]$$